

$$\text{dł. łuku krzywej} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

ZESTAW 2

Zad.1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego parabola $y = x^2$ i prostą $2x - y + 3 = 0$.

Zad.2

Obl. długość łuku krzywej $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1/2$.

Zad.3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2 + 2x + 5)} dx$

Zad.4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 10x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 10 \\ 3x_1 + 17x_2 + 9x_3 + 16x_4 = a + 12 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 5 & 10 & 10 \\ 3 & 17 & 9 & 16 & a+12 \end{array} \right]$$

Zad.5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 4x + y - 3z = 5 \\ 13x + 2y - 8z = 20 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + 2s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Zad.6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

$$(2) \quad y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \quad 1 \leq x \leq 4$$

$$(2) \quad y = (x-3) \frac{\sqrt{x}}{3} \quad 0 \leq x \leq 4$$

ZESTAW 9

Zad.1

Obliczyć pole figury, ograniczonej krzywymi $y = \sin 2x$, $y = \sin x$, $\pi/3 \leq x \leq \pi$.

Zad.2

Obliczyć długość łuku krzywej $\begin{cases} x = 5 \cos t(1 + \cos t) \\ y = 5 \sin t(1 + \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Wskazówka. Zarówno $x'(t)$, jak i $y'(t)$ przedstawić w postaci sumy dwóch składników - jeden zależny od t , a drugi od $2t$. Wyrażenie pod pierwiastkiem kwadratowym (suma kwadratów pochodnych) jest pełnym kwadratem.

†-Zad.3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna: $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$

†Zad.4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = a + 7 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & 4 & 3 & a+7 \end{array} \right]$$

†Zad.5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 4x - y - 3z = -11 \\ 6x + 2y - 4z = -8 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases}$$

Zad.6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, gdzie $x, y \neq 0$.

$$\max - \text{nie ma} \quad \min \approx 4,32675$$

Arka, jak zrobić 1 lub 4? =]
 ew jak zrobić 3?

ZESTAW 1

Zad.1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego krzywymi $y = x^3$, $y^2 = x$.

Zad.2

Obl. długość łuku krzywej $y = (x-3)\sqrt{x}/3$, $0 \leq x \leq 4$.

Zad.3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2+x+1)} dx$$

$x^2 = \sqrt{x}$
 $x^3 = x$
 $x^2 - x = 0$
 $x(x^2-1) = 0$
 $x=0 \quad x=1$
 $x^2 = \frac{1}{3}x^2$
 $\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$
 $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{4}$
 $P = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

Zad.4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4$$

$$-x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = a + 7$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & -4 \\ -1 & 5 & 4 & 3 & a+7 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 0+7 \\ 0+7 \end{array}$$

Zad.5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 4x - y - 3z = 5 \\ 13x + 2y - 8z = 25 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + 3s \\ z = 1 + 4s \end{cases}$$

Zad.6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

ZESTAW 3

Zad.1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego parabola $y = 2x - x^2$ i prostą $x + y = 0$.

Zad.2

Obl. długość łuku krzywej $y = (2/3)(x-1)^{3/2}$, $1 \leq x \leq 4$.

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Zad.3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2 - 2x + 5)} dx$$

Zad.4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = a$$

Zad.5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 4x - y - 2z = -8 \\ 13x + 2y - 8z = -20 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + 2s \\ y = 2 + 3s \\ z = 1 + 4s \end{cases}$$

Zad.6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^2$.

ZESTAW 5

Zad. 1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego liniami $y = x$ i $y = 4x$ ($x \geq 0$).

Zad. 2

Obliczyć długość łuku krzywej $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $-1 \leq x \leq 9/16$.

Zad. 3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2-2x+5)} dx$

Zad. 4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = -2$$

$$x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 = a$$

Zad. 5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 3x - y - 3z = -10 \\ 5x + 2y - 5z = -13 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + 3s \\ z = 1 + 4s \end{cases}$$

Zad. 6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y - 1$.

ZESTAW 6

Zad. 1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego krzywymi $y = 2x^3$ i $y^2 = 4x$.

Zad. 2

Obliczyć długość łuku krzywej $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (t^2 - 2) \cos t - 2t \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq \pi$.

Zad. 3

Zbadać zbieżność całki niewłaściwej i obliczyć ją, jeżeli jest zbieżna: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2+2x+5)} dx$ tj. zestaw 2

Zad. 4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 - 2x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 - 9x_2 - x_3 + 3x_4 = a$$

Zad. 5

Znaleźć równanie płaszczyzny, przechodzącej przez prostą $l_1 : \begin{cases} 3x - y - 3z = 0 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$ i równoległej do

$$\text{prostej } l_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 2 + 3s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

Zad. 6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy - 6x - 4y + 5$.

ZESTAW 11

Zad.1

Obliczyć pole obszaru, ograniczonego parabolami $y^2 = 8x$ i $x^2 = 8y$.

Zad.2

osi Ox .

Zad.3

rozbieżne

Zad.4

Rozwiązać układ równań z parametrem a .

$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 1$$

$$2x_1 - 3x_3 = 3$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = a$$

Zad.5

Znaleźć równanie płaszczyzny, równoległej do prostej $l_1 : \begin{cases} 3x - y - 3z = -7 \\ 2x + 2y - 4z = 4 \end{cases}$ i takiej, aby leżała na

$$\text{niej prosta } l_2 : \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = 2 - s \\ z = 1 - 2s \end{cases}$$

Zad.6

Znaleźć ekstrema funkcji danej wzorem $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$, gdzie $x, y \neq 0$.

8192

 $2\pi \frac{4\sqrt{6}}{5}$

(?)

$$\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) - 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{144}{(3x^2+1)(x^2+3)} dx$$

$$\frac{144\pi}{48\sqrt{3}}$$

? nie ma ekstremum?

~~Exercícios Resolvidos~~ ~~para~~ ~~resolução~~

① $y = 2x^2$ $y = \frac{x^3}{3}$ restar 8

② $x = t^2$ $y = t - \frac{1}{3}t^3$ $0 \leq t \leq \sqrt{3}$

③ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)(x+3)^2}$

④ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 13 & 10 \\ 3 & 15 & 14 & 22 & a+15 \end{array} \right]$

⑤ $\begin{cases} 3x - y - 3z = -9 \\ 4x + 2y - 8 = -10 \end{cases} \quad \text{l}_2: \begin{cases} x = 3+s \\ y = 2+2s \\ z = 1-s \end{cases}$

⑥ $4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

zestaw 7

① $y = \frac{x^2}{2} \quad y = \frac{1}{1+x^2}$

② $x = 6 - 3t^2 \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$
 $y = 4t^3$

③ $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)^2} dx$

④ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 10 & 11 & 8 \\ 3 & 12 & 16 & 18 & a+7 \end{array} \right]$

⑤ $\begin{array}{l} l_1 \\ l_2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right] \quad \begin{cases} x = 3+s \\ y = 2+3s \\ z = 1+s \end{cases}$

⑥ $x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$